Ένα μοντέλο Nx2D για τον υπολογισμό της διάδοσης ακουστικών σημάτων στη θάλασσα σε περιβάλλοντα με τρισδιάστατη γεωμετρία

Μιχάλης Ταρουδάκης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ίδρυμα Τεχνολογίας και Έρευνας, Ινστιτούτο Υπολογιστικών Μαθηματικών,
Ν. Πλαστήρα 100, 70013 Ηράκλειο

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία παρουσιάζεται ένα απλό μοντέλο ακουστικής διάδοσης για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου σε θαλάσσιους κυματοδηγούς όταν η γεωμετρία του περιβάλλοντος έχει τρισδιάστατο χαρακτήρα. Χρησιμοποιείται σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων και θεωρία κανονικών ιδιομορφών συζευγμένων ως προς την απόσταση (coupled mode theory) αλλά χωρίς σύζευξη ως προς το αζιμούθιο. Εφαρμογές αυτής της τεχνικής έχομε σε προβλήματα ακουστικής τομογραφίας στη θάλασσα οπότε το πεδίο μας χωρίζεται σε κάθετες ως προς την επιφάνεια τομές.. Παρουσιάζεται με συντομία η θεωρία των συζευγμένων ιδιομορφών για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου σε περιοχή με τοπική ανομοιογένεια στις κάθετες τομές και με χρήση παραδειγμάτων παρουσιάζεται η λύση του προβλήματος στο πεδίο των συχνοτήτων και συζητείται η ποιοτική συμπεριφορά του μοντέλου.

A Nx2D model for calculating the propagation of sound signals in 3-D oceanic environments

ABSTRACT

A simple model for the calculation of the acoustic field in 3-D oceanic environments where the inhomogeneity is of compact support is presented. A cylindrical co-ordinate system is used and Normal Mode solution of the Helmholtz equation is considered. Full coupling between modes is assumed in vertical slices defined on the basis of the azimuth angles from the origin, but no coupling is assumed between slices defined at different angles. The approach is known as Nx2D and has applications in problems of ocean acoustic tomography.

Εισαγωγή

Η εργασία αναφέρεται στο πρόβλημα της διάδοσης του ήχου σε θαλάσσιους κυματοδηγούς με τρισδιάστατη γεωμετρία η οποία ωστόσο περιλαμβάνει περιορισμένη γεωμετρικά ανομοιομορφία (compact support). Στην εργασία παρουσιάζεται μία απλουστευμένη διαδικασία σύνθεσης του τρισδιάστατου ακουστικού πεδίου από γνωστή σημειακή μονοχρωματική πηγή που θεωρείται κατάλληλη για να χρησιμοποιηθεί σε αντίστροφα προβλήματα ακουστικής τομογραφίας, σύμφωνα με τα οποία το τρισδιάστατο θαλάσσιο περιβάλλον περιγράφεται μέσω N κάθετων τομών (slices) και ανασυντίθεται μέσω αυτών. Η διάδοση σε κάθε τομή θεωρείται ανεξάρτητη της διάδοσης σε κάθε άλλη με αποτέλεσμα να αμελείται η σύζευξη της ακουστικής διάδοσης στο αζιμούθιο. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή και αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως διάδοση Nx2D (αντί για 3D). Στην εργασία θεωρείται ότι η διάδοση σε κάθε τομή παρουσιάζει πλήρη χαρακτηριστικά σύζευξης. Η περίπτωση που παρουσιάζεται ως εφαρμογή στην εργασία αφορά κωνική ανύψωση του πυθμένα αλλά η θεωρία εφαρμόζεται γενικότερα σε κάθε τρισδιάστατη ανομοιογένεια περιορισμένης έκτασης. Τα αποτελέσματα της εργασίας μπορούν να συγκριθούν με αποτελέσματα που έχουν παρουσιασθεί για το εν λόγω πρόβλημα (κωνική ανύψωση) με πλήρη σύζευξη στο αζιμούθιο [1-2]. Το πλεονέκτημα της παρουσιαζόμενης θεώρησης είναι ότι δίνει πολύ καλά αποτελέσματα με μικρότερο χρόνο εκτέλεσης του σχετικού προγράμματος και τέλος μπορεί να δώσει αποτελέσματα για μεγάλες συχνότητες, κάτι που είναι δύσκολο με τις γνωστές 3D θεωρήσεις.

1. Το πρόβλημα της ακουστικής διάδοσης σε τρισδιάστατο θαλάσσιο κυματοδηγό.

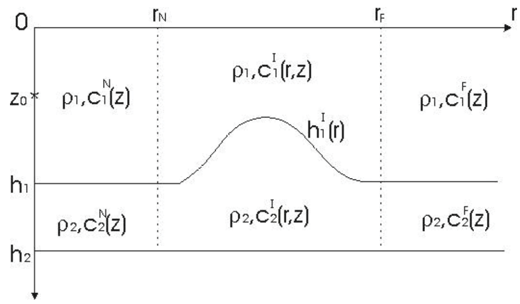
1.1. Το πρόβλημα και η λύση του με ανάπτυγμα σε σειρά ιδιοσυναρτήσεων σε περιβάλλον αξονικής συμμετρίας

Θεωρούμε το περιβάλλον που φαίνεται στο σχήμα 1.1. Η πυκνότητα ρ θα θεωρηθεί ανεξάρτητη από την απόσταση. Η υδάτινη στήλη συναντά τον πυθμένα σε διεπιφάνεια βάθους $h_1(r)$ κάτω από την οποία υπάρχει ρευστός πυθμένας που τερματίζεται σε επίπεδο σύνορο σε βάθος h_2 με οριακή συνθήκη ακλόνητου πυθμένα. Οι οριακές συνθήκες του προβλήματος απαιτούν επιπλέον επιφάνεια ελεύθερη πιέσεων συνέχεια της πίεσης και της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων στη διεπιφάνεια και συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld. Η ανομοιογένεια περιορίζεται ανάμεσα στις αποστάσεις r_N και r_F .

Για μία σημειακή αρμονική πηγή σε βάθος z_0 , η κυματική εξίσωση (Helmholtz) για την ακουστική πίεση $p(r,z)$ γράφεται :

$$\frac{\partial^2 p(r,z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p(r,z)}{\partial z}+\frac{\partial^2 p(r,z)}{\partial z^2}+k^2(r,z)p(r,z)=-\frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(z-z_0) \quad . \quad (1.1)$$

όπου $k(r,z) = \omega / c(r,z)$ είναι ο αριθμός κύματος και $c(r,z)$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου.



Σχήμα 1.1. Ένα περιβάλλον μεταβαλλόμενων συναρτήσει της απόστασης παραμέτρων σε κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Παρουσιάζονται οι βασικές γεωακουστικές παράμετροι του προβλήματος, ταχύτητα (c)και πυκνότητα (ρ).

Σε κάθε απόσταση *r*, θα θεωρήσουμε την ομάδα ιδιοσυναρτήσεων $u_n(r,z)$ του «τοπικού» προβλήματος βάθους:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\rho(z)}\frac{\partial u_n(r,z)}{\partial z}\right]+\left[\frac{k^2(r,z)}{\rho(z)}-\frac{\lambda_n(r)}{\rho(z)}\right]u_n(r,z)=0 \ , \qquad (1.2)$$

όπου

$$u_n(r,z)=\begin{cases} u_n^{(1)}(r,z) & \text{για} \quad 0\le z\le h_1(r) \\ u_n^{(2)}(r,z) & \text{για} \quad h_1(r)\le z\le h_2 \end{cases}$$

$$k(r,z)=\begin{cases} k^{(1)}(r,z) & \text{για} \quad 0\le z\le h_1(r) \\ k^{(2)}(r,z) & \text{για} \quad h_1(r)\le z\le h_2 \end{cases}$$

$$\rho(z)=\begin{cases} \rho_1 & \text{για} \quad 0\le z\le h_1(r) \\ \rho_2 & \text{για} \quad h_1(r)\le z\le h_2 \end{cases}$$

και

$$u_n^{(1)}(r,0)=0 \ , \qquad (1.3\alpha)$$

$$u_n^{(1)}(r,h_1(r))=u_n^{(2)}(r,h_1(r)) \ , \qquad (1.3\beta)$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial u_n^{(1)}(r,h_1(r))}{\partial z}=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial u_n^{(2)}(r,h_1(r))}{\partial z} \ , \qquad (1.3\gamma)$$

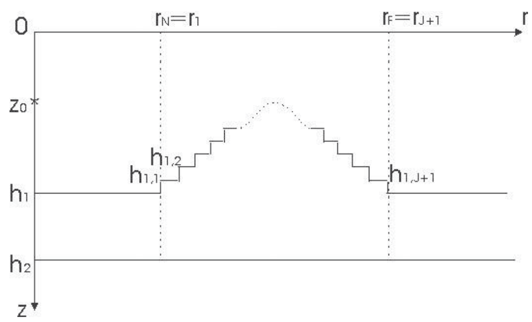
$$\frac{\partial u_n^{(2)}}{\partial z}(r,h_2)=0 \quad . \tag{1.3δ}$$

Γνωρίζουμε ότι υπό τις ανωτέρω συνθήκες, το πρόβλημα βάθους είναι ένα κανονικό πρόβλημα ιδιοτιμών τύπου Sturm-Liouville (με διεπιφάνεια), και ότι οι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα. Επιπλέον είναι πλήρεις στο $[0,h_2]$ οπότε μπορούμε να γράψουμε την λύση για την πίεση ως μία συγκλίνουσα σειρά.

$$p(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(r)u_n(r,z) \quad . \tag{1.4}$$

Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών γίνεται με λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης του προβλήματος 1.3 ο υπολογισμός των ιδιοσυναρτήσεων από τη λύση του προβλήματος βάθους και ο υπολογισμός των συντελεστών $\varphi_n(r)$ μέσω θεωρίας συναρτήσεων Green ως κατωτέρω [3,4].

1.2 Η Διακριτοποίηση



Σχήμα 1.2. Διακριτοποίηση της ανομοιογένειας ανάμεσα στο r_N και το r_F.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε χωρική διακριτοποίηση *J* στοιχείων στην ανομοιογένεια όπως στο σχήμα 1.2 προκειμένου να καταστεί δυνατή η αριθμητική αντιμετώπιση του προβλήματος και ο ορισμός τοπικών ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων σε καθένα από τα *J+2* διακριτά τμήματα του περιβάλλοντος (κυματοδηγού). Από την πηγή μέχρι την αρχή της ανομοιογένειας θεωρούμε επί πλέον το εγγύς πεδίο (Near Field) και από το τέλος της ανομοιογένειας μέχρι το άπειρο το άπω πεδίο (Far Field). Κάτω από αυτές τις συνθήκες ορίζουμε διακριτά προβλήματα βάθους (εξισώσεις 1.3) για τα *J+2* τμήματα του κυματοδηγού με τις ανάλογες ιδιοτιμές $\lambda_{n,j}$ και ιδιοσυναρτήσεις $u_{n,j}(z)$, $j=1,...J+2$.

Στη συνέχεια μπορούμε να δείξουμε [4] ότι η λύση του προβλήματός μας στα διάφορα χωρία διακριτοποίησης δίδεται από τις σχέσεις :

$$p_N(r,z) = \frac{1}{4\rho_1}\sum_{n=1}^{M} u_{n,N}(z_0)u_{n,N}(z)H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,N}}r) + \sum_{n=1}^{M} C_{n,N}J_0(\sqrt{\lambda_{n,N}}r)u_{n,N}(z)\ , \quad (1.5\alpha)$$

$$p_j(r,z) = \sum_{n=1}^{M}\left\{A_{n,j}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r) + B_{n,j}H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda_{n,j}}r)\right\}u_{n,j}(z), \quad j = 1,2,...J \quad (1.5\beta)$$

$$p_F(r,z) = \sum_{n=1}^{M} A_{n,F}H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda_{n,F}}r)u_{n,F}(z)\ , \quad (1.5\gamma)$$

όπου έχομε διατηρήσει ως μέγιστο αριθμό ιδιομορφών *M* αυτές που αντιστοιχούν στις διαδιδόμενες ιδιομορφές (Normal Modes) που έχουν συνεισφορά σε αποστάσεις μακριά από την πηγή και $H_0^{(*)}(x), * = 1,2$ είναι οι συναρτήσεις Hankel μηδενικής τάξης πρώτου και δεύτερου είδους που εκφράζουν αποκλίνοντα και συγκλίνοντα κύματα αντίστοιχα και $J_0(x)$ είναι συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης.

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες συνέχειας της πίεσης και της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου στις κατακόρυφες, τεχνητές διεπιφάνειες, και αξιοποιώντας τη συνθήκη ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, υπολογίζομε λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα *2 x M x (J+1)* εξισώσεων τους ισάριθμους άγνωστους συντελεστές της αναπαράστασης της λύσης. Το σύστημα είναι καλώς τεθειμένο [4]. Στη λύση εισάγονται και οι συντελεστές σύζευξης ως κατωτέρω, που εκφράζουν ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στις ιδιομορφές της λύσης.

$$C_{1mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_j} u_{m,j}u_{n,j+1}dz\ , \quad (1.6\alpha)$$

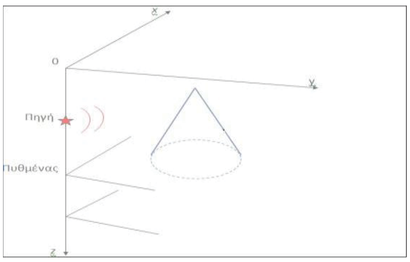
$$C_{2mn} = \int_0^{h_2} \frac{1}{\rho_{j+1}} u_{m,j}u_{n,j+1}dz\ . \quad (1.6\beta)$$

Τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά. Η λύση του προβλήματός μας είναι ακριβής με τον περιορισμό της διακριτοποίησης του χωρίου της ανομοιογένειας. Η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου για τον υπολογισμό της ακουστικής πίεσης σε περιβάλλον μεταβαλλόμενων παραμέτρων έχει υλοποιηθεί μέσω του προγράμματος MODE4 το οποίο επί πλέον χρησιμοποιεί μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του προβλήματος στην περίπτωση μεταβαλλόμενης με το βάθος ταχύτητας διάδοσης του ήχου.

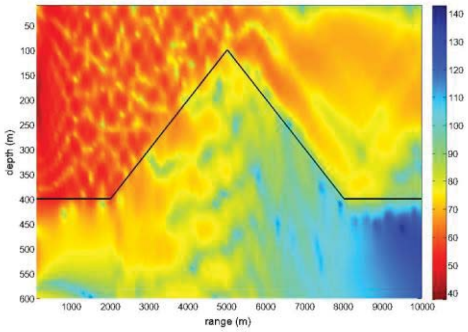
1.2. Εφαρμογή στις 3 διαστάσεις με πολλαπλές τομές.

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, όταν η γεωμετρία παρουσιάζει τρισδιάστατο χαρακτήρα, μία μέθοδος που δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα ιδιαίτερα όταν η ανομοιογένεια βρίσκεται μακριά από την πηγή, είναι αυτή στην οποία θεωρούμε από τη σημειακή πηγή κάθετες τομές που «σαρώνουν» την ανομοιογένεια, σε κάθε μία από τις οποίες θεωρείται δισδιάστατη γεωμετρία. Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση του προβλήματος την προαναφερθείσα μέθοδο των συζευγμένων ιδιομορφών (coupled modes). Θεωρώντας ότι δεν ανταλλάσσεται ενέργεια ως προς το αζιμούθιο, λύνομε το πρόβλημα για όλες τις κάθετες τομές και στη συνέχεια με παρεμβολή υπολογίζομε το ακουστικό πεδίο σε κάθε σημείο του τρισδιάστατου κυματοδηγού. Επομένως στις λύσεις του προβλήματος όπως αυτές αποτυπώνονται στις 1.5 προσθέτομε ένα ακόμη δείκτη (l) που αναφέρεται στην κάθετη τομή σε κάθε αγωνία θ_l . Το σχήμα 1.3 αποτυπώνει τα παραπάνω σε μία περίπτωση που η τοπική ανομοιογένεια έχει κωνική μορφή, που θα είναι και η περίπτωση που θα δούμε στη συνέχεια ως εφαρμογή.

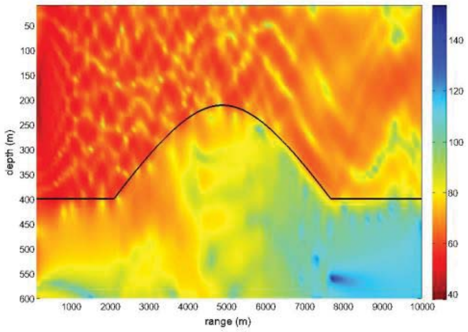
Θεωρούμε λοιπόν το περιβάλλον που περιγράφεται από το σχήμα 1.3. Το βάθος της θάλασσας εκτός κώνου είναι 400 m ενώ ο κώνος έχει διάμετρο 4000 m, ύψος 300 m, και ο άξονάς του βρίσκεται σε απόσταση (range) 5000 m από την πηγή. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στο νερό θεωρείται σταθερή και ίση με 1500 m/sec, ενώ για τον πυθμένα θεωρούμε πυκνοτητα 1500 kg/m^3 και ταχύτητα διάδοσης του ήχου 1800 m/sec. Για υπολογιστικούς λόγους θεωρούμε και ένα δεύτερο (τεχνητό) πυθμένα σε μεγάλο βάθος με πολύ σκληρό υλικό προκειμένου να έχομε προσέγγιση της μοντελοποίησης του τέλεια ανακλαστικού πυθμένα που επιβάλει η θεωρία. Για την επίλυση του προβλήματος με τη μέθοδο των πολλαπλών τομών, θα θεωρήσομε γωνίες ως προς το αζιμούθιο από -40^0 έως 40^0 και θα λάβουμε τομές ανά 2 μοίρες. Σε κάθε μία από τις τομές αυτές υπολογίζομε το ακουστικό πεδίο για μια σημειακή ηχητική πηγή που εκπέμπει στα 50 Hz και βρίσκεται σε βάθος 200 m. Παράδειγμα υπολογισμού δίνομε στα σχήματα 1.4. και 1.5 που αφορούν διάδοση στην τομή που περνά από τον άξονα του κώνου και σε γωνία   μοιρών. Στο σχήμα 1.6 δίδεται το ηχητικό πεδίο σε βάθος 100 m για όλο το περιβάλλον από -40,5 έως 40,5 μοίρες. Σε όλα τα σχήματα η επίδραση της ανύψωσης είναι εμφανής.



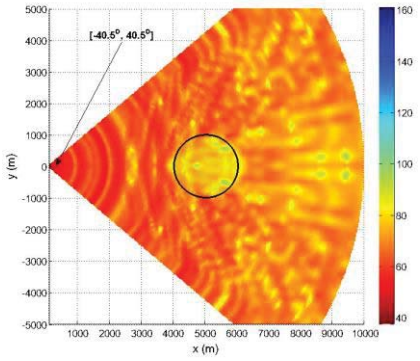
Σχήμα 1.3. Το περιβάλλον του παραδείγματος. Η επιφάνεια της θάλασσα είναι επίπεδη και βρίσκεται στη θέση z=0.



Σχήμα 1.4. Το ηχητικό πεδίο σε τομή οριζόμενη από τον άξονα του κώνου.



Σχήμα 1.5. Το ηχητικό πεδίο σε τομή οριζόμενη από γωνία 27,5^0 ως προς το αζιμούθιο



Σχήμα 1.6. Το ηχητικό πεδίο σε οριζόντια τομή σε βάθος 200 μέτρων. Στο σχήμα φαίνεται και η τομή με τον κώνο

2. Σχολιασμός

Στην εργασία παρουσιάστηκε το θεωρητικό υπόβαθρο και ένα παράδειγμα εφαρμογής μιας μεθόδου που στη βιβλιογραφία χαρακτηρίζεται *Nx2D* (η πολλαπλών τομών) για τον προσεγγιστικό υπολογισμό του ηχητικού πεδίου σε θαλάσσιο κυματοδηγό που παρουσιάζει τοπική τρισδιάστατη ανομοιομορφία. Στο παράδειγμα που δόθηκε και αφορούσε ανύψωση πυθμένα με κωνικό σχήμα η επίδραση της ανομοιογένειας ήταν εμφανής. Στα σχήματα 1.4 και 1.5 μπορούμε να διακρίνουμε εύκολα την διαφυγή ακουστικής ενέργειας προς τον πυθμένα και τη μείωση των διαδιδόμενων κανονικών ιδιομορφών στην περιοχή της ανύψωσης. Η διαφυγή ενέργειας στον πυθμένα δεν ανακτάται πίσω από την ανομοιογένεια παρά μόνο σε μεγάλες γωνίες ως προς το αζιμούθιο, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 1.6. αλλά και παρατηρώντας τη μορφή του ακουστικού πεδίου στις κάθετες τομές που παρουσιάζονται στα σχήματα 1.4 και 1.5. Η χαρακτηριστική δομή του ακουστικού πεδίου πίσω από μία κωνική ανομοιογένεια έχει παρατηρηθεί και στις προηγούμενες εργασίες που αφορούν την ίδια γεωμετρική περίπτωση ([1-2]). Δεν έγινε ωστόσο σύγκριση σε απόλυτα μεγέθη με αποτελέσματα που προέρχονται από τη λύση του προβλήματος με μεθόδους που λαμβάνουν υπ όψιν τους εναλλαγή ενέργειας κατά το αζιμούθιο, κάτι που είναι στις μελλοντικές προθέσεις του συγγραφέα, όπως επίσης είναι στις προθέσεις του η εφαρμογή της μεθόδου σε ειδικά περιβάλλοντα (σφήνες) που αποτελούν προβλήματα αναφοράς για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου σε τρισδιάστατα θαλάσσια περιβάλλοντα.

3. Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του έργου ΠΕΦΥΚΑ της Δράσης ΚΡΗΠΙΣ της ΓΓΕΤ. Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και το Ευρωπαϊκό Ταμείο Περιφερειακής Ανάπτυξης της Ευρωπαϊκής Ένωσης στο Πλαίσιο του ΕΣΠΑ και του Ε.Π. Ανταγωνιστικότητα και Επιχειρηματικότητα. Ευχαριστώ επίσης τον υποψήφιο Διδάκτορα Κώστα Σμαραγδάκη για τη βοήθειά του στην παραγωγή των αριθμητικών αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στην εργασία

5. Αναφορές

[1] Taroudakis M.I. "A Coupled-Mode Formulation for the Solution of the Helmholtz Equation in the Water in the Presence of a Conical Sea-Mount", Journal of Computational Acoustics, Vol. 4, No 1, pp 101-121 (1996).

[2] Luo W. and Schmidt, H. “Three–dimensional propagation and scattering around a conical seamount,” J. Acoust. Soc. Am. 125, 52–65 (2009).

[3] Boyles, Allan: *Acoustic Waveguides. Applications to Oceanic Science*, John Wiley, (1984).

[4] Taroudakis M.I., Athanassoulis G.A. and Ioannidis J.P. "A Hybrid Solution of the Helmholtz Equation in Shallow Water, Based on a Variational Principle" in *Acoustique Sous Marine et Ultrasons*,CNRS-LMA, Marseille, pp. 213-227 (1991).